

Chap 2: TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONDUCTION



I. Equation de la chaleur

Considérons un système fermé solide (ou fluide au repos) homogène et indéformable, occupant un volume (\mathcal{V}) limité par une surface Σ . Ce système évolue au cours du temps sous l'effet d'échanges d'énergie sous forme de chaleur avec l'extérieur et/ou de production interne d'énergie calorifique. La distribution de température à l'intérieur du volume n'est pas uniforme et évolue au cours du temps. Le système n'est donc pas à l'équilibre thermodynamique et est donc le siège de flux de chaleur.

Pour établir l'équation qui régit l'évolution de la température en chaque point du volume (\mathcal{V}), nous allons faire un bilan d'énergie sur le système. Dans toute la suite du cours, on considèrera que le système est au repos et qu'il n'y a pas de travail mécanique mis en jeu car le système est indéformable (pas de variation de volume). La variation d'énergie interne du système entre les instants t et $t + dt$ est alors :

$$dU = \delta Q_{ext} + \delta Q_{int}$$

où : dU est la variation d'énergie interne du système pendant un intervalle de temps dt .

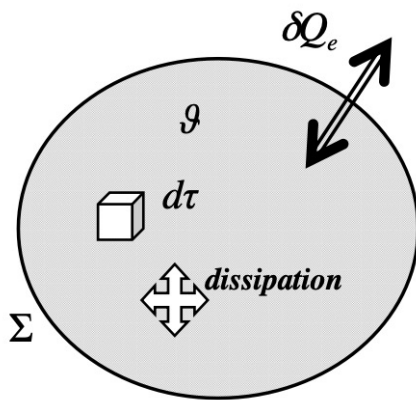
δQ_{ext} est la quantité de chaleur échangée par le système avec l'extérieur à travers Σ pendant l'intervalle de temps dt .

δQ_{int} est la quantité de chaleur produite par dissipation dans le volume total \mathcal{V} pendant l'intervalle de temps dt .

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\delta Q_{ext}}{dt} + \frac{\delta Q_{int}}{dt} = \phi_E - \phi_S + \phi_{PR}$$

Puisque le système dans son ensemble n'est pas homogène en température donc pas à l'équilibre, nous ne pouvons pas appliquer directement le premier principe d'un point de vue macroscopique.

Nous allons donc considérer un élément de volume élémentaire, $d\tau$, suffisamment petit de telle sorte que la température à l'intérieur puisse être considérée uniforme (mais suffisamment grand pour contenir un grand nombre de particules). Le volume élémentaire peut alors être considéré à l'équilibre : on parle d'équilibre thermodynamique local.



volume du système : $V = \iiint_{\mathcal{V}} d\tau$

masse contenue dans $d\tau$: $dm = \rho d\tau$

ρ masse volumique du corps

masse du système : $m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau$

a. Variation d'énergie interne de la masse m contenue dans (\mathcal{V}) entre les instants t et $t + dt$

- la variation d'énergie interne pour l'unité de masse du système est :

$$du = c dT$$

où : u est l'énergie interne massique

c est la chaleur spécifique (en $J/K/kg$) du matériau

- la variation d'énergie interne pour la masse dm contenue dans le volume élémentaire $d\tau$ (considéré à l'équilibre thermodynamique donc de température uniforme) est :

$$dm du = \rho d\tau du = \rho d\tau c dT = \rho d\tau c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

- en intégrant sur l'ensemble du volume, on obtient la variation d'énergie interne pour la masse m contenue dans (\mathcal{V}) pendant l'intervalle de temps dt :

$$dU = dt \iiint_{\mathcal{V}} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau$$

Soit, par unité de temps :

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau}$$

c. **Flux de chaleur échangé par le système avec l'extérieur à travers la surface Σ :**

$$\phi_E - \phi_S = \phi = \iint_{\Sigma} -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} d\Sigma$$

avec $\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T$ (transfert de chaleur par conduction – loi de Fourier)

$$\Rightarrow \boxed{\phi_E - \phi_S = \iint_{\Sigma} \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} d\Sigma}$$

Le premier principe $\frac{dU}{dt} = (\phi_E - \phi_S) + \phi_{PR}$ s'écrit :

$$\boxed{\iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau = \iint_{\Sigma} \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} d\Sigma + \iiint_{\vartheta} P d\tau}$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski¹ pour l'intégrale de surface, on obtient :

$$\boxed{\underbrace{\iiint_{\vartheta} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau}_{\text{accumulation}} = \underbrace{\iiint_{\vartheta} \text{div}(\lambda \vec{\nabla} T) d\tau}_{\text{échanges avec l'environnement}} + \underbrace{\iiint_{\vartheta} P d\tau}_{\text{production interne}}}$$

Ce bilan constitue l'**équation de la chaleur sous forme globale** (intégrée sur tout le volume). Il est valable quel que soit l'élément de volume $d\tau$. On peut alors écrire une **équation locale de la chaleur**, qui permet, après résolution, de déterminer la température en tout point du système à chaque instant.

Equation locale de la chaleur :

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \vec{\nabla} T) + P} \quad \text{dans } (\mathcal{V}) \quad \text{eq. II}$$

Dans le cas où λ peut être considérée constante (milieu homogène et λ indépendante de T) :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}(\vec{\nabla} T) + P$$

$$\boxed{\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + P} \quad \text{dans } (\mathcal{V})$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T + \frac{P}{\rho c}} \quad \text{dans } (\mathcal{V})$$

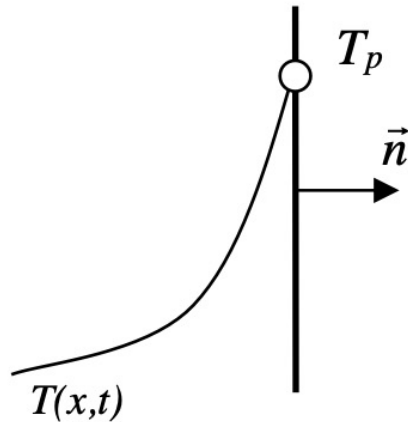
où $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ (Laplacien).

$$\boxed{\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}} \quad (m^2/s) \text{ est la } \textit{diffusivité thermique} \text{ du milieu, qui quantifie la vitesse à laquelle}$$

diffuse la chaleur à l'intérieur du milieu.

L'intégration de l'équation de la chaleur permet d'obtenir $T(x, y, z, t)$. On doit préciser :

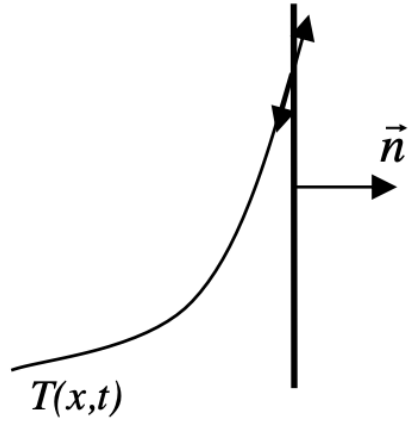
- ❖ Une condition initiale $T(x, y, z, t = 0)$ qui définit l'état thermique initial du système
- ❖ Deux conditions aux limites imposées aux frontières. Ces conditions peuvent être de deux types :
 - des conditions de type Dirichlet : **on impose une température** aux frontières.



Dans ce cas, le flux de chaleur traversant la frontière est inconnu (résulte des échanges). On pourra le calculer par la loi de Fourier appliquée à la frontière.

$$\varphi_{\Sigma} = -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma}$$

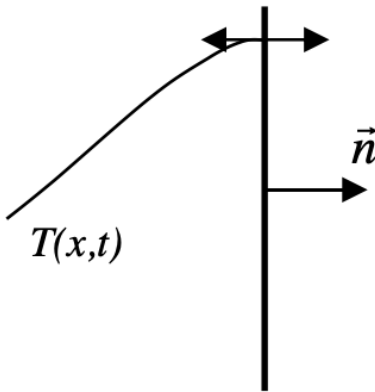
- des conditions de type Neumann : **on impose un flux de chaleur**, c'est-à-dire le gradient de température, aux frontières.



Dans ce cas, la température de la frontière est inconnue (résulte des échanges). De manière générale :

$$\varphi_{\Sigma} = -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma} \Rightarrow \text{on impose un gradient de}$$

température \Rightarrow on impose la pente du profil de température à la frontière.

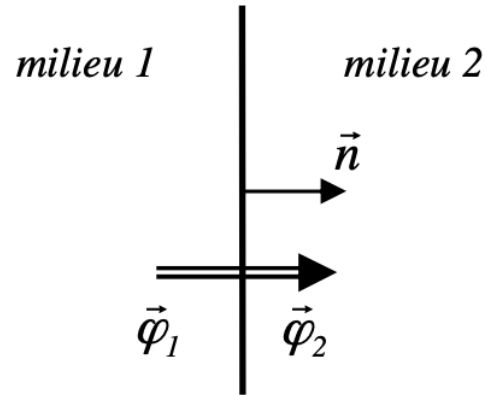


Cas particulier de la frontière adiabatique : dans ce cas, le flux de chaleur traversant la frontière est nul.

$$\varphi_{\Sigma} = \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0 \Rightarrow \text{on impose une pente nulle au profil de}$$

température à la frontière.

Conditions à l'interface entre deux milieux :



Continuité du flux à la traversée de l'interface :

$$\vec{\varphi}_1 = \vec{\varphi}_2 \quad \text{ou} \quad \boxed{(\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_2) \cdot \vec{n} = 0}$$

Pour l'exemple du schéma :

- du point de vue du milieu 1 : $\varphi_1 < 0$
 - du point de vue du milieu 2 : $\varphi_2 > 0$
- avec $\varphi_2 = -\varphi_1$

II. Conduction en régime permanent sans dissipation interne de chaleur

1) Equation de la chaleur

On considère un solide (ou un fluide au repos) homogène et indéformable et on suppose que la conductivité thermique du matériau est constante. Reprenons l'équation de la chaleur établie précédemment :

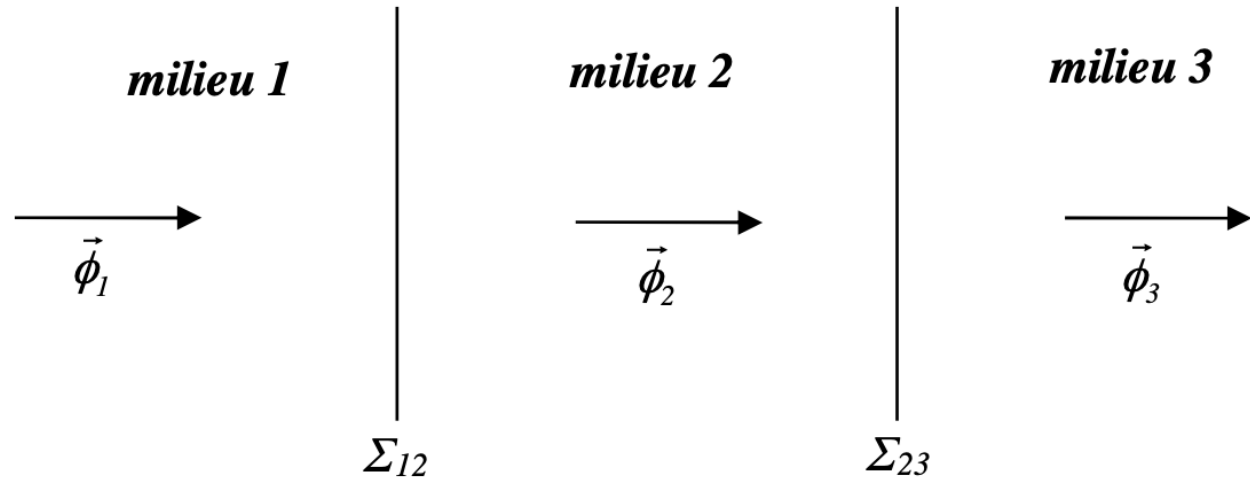
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + P$$

- En régime stationnaire (permanent) : $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (le terme d'accumulation est nul) $\Rightarrow T(x, y, z)$
- Sans dissipation interne de chaleur : $P = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 T = 0} \quad \text{dans } (\mathcal{V})$$

Remarque importante : le terme $\nabla^2 T$ est directement lié au flux de chaleur qui traverse la frontière du système. En régime permanent sans dissipation, le bilan de flux qui entre et qui sort du domaine est nul. On a donc **conservation du flux de chaleur** :

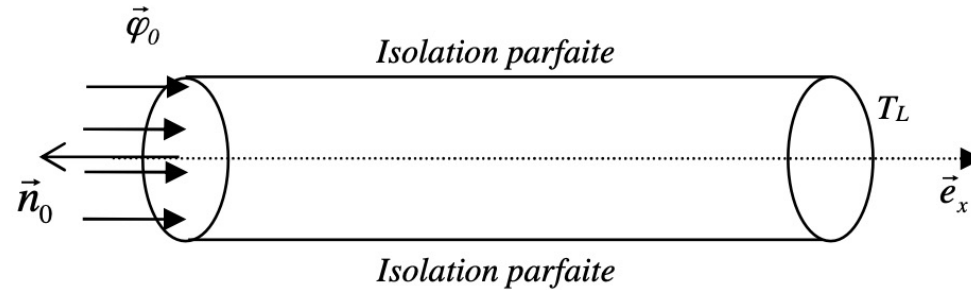
$$\phi = \phi_E - \phi_S = \iint_{\Sigma} -\vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, d\Sigma = 0$$



Conservation du flux : $\vec{\phi}_1 = \vec{\phi}_2 = \vec{\phi}_3 = \dots$

2) Conduction dans un barreau

On considère un barreau cylindrique de longueur L et de section S , composé d'un matériau homogène de conductivité thermique λ supposée constante. Ce barreau est chauffé à l'une de ses extrémités par effet Joule et est refroidi à l'autre extrémité à une température donnée (par exemple en faisant circuler un liquide de refroidissement). On suppose le régime stationnaire atteint.



On suppose que le barreau est parfaitement isolé sur sa surface latérale (donc pas d'échange de chaleur avec l'extérieur à travers cette surface). On va donc pouvoir supposer que le flux de chaleur ne se propage que dans la direction axiale \vec{e}_x (flux unidirectionnel). La température à l'intérieur du barreau ne dépend alors que d'une seule variable d'espace x : $T = T(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{L'équation de la chaleur s'écrit : } \nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 & \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dT}{dx} = \text{Cste} = A \\
 & \quad \Leftrightarrow \quad T(x) = A x + B
 \end{aligned}$$

La distribution de température à l'intérieur du barreau est donc linéaire. La détermination des 2 constantes A et B nécessite la connaissance de 2 conditions aux limites.

- détermination de A : en $x = 0$, on impose un flux de chaleur ϕ_0 ($T(x=0) = T_0$ inconnue):

$$\phi_0 = \iint_S -\vec{\varphi}_0 \cdot \vec{n} \, dS = \iint_S \vec{\varphi}_0 \cdot \vec{e}_x \, dS \quad \text{avec} \quad \vec{\varphi}_0 = -\lambda \vec{\nabla} T \Big|_{x=0} = -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \vec{e}_x$$

$$\text{et } \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = A \Rightarrow \quad \phi_0 = \iint_S -\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} \, dS = \iint_S -\lambda A \, dS = -\lambda S A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{-\phi_0}{\lambda S}}$$

- détermination de B : en $x = L$, on impose la température $T(x=L) = T_L$:

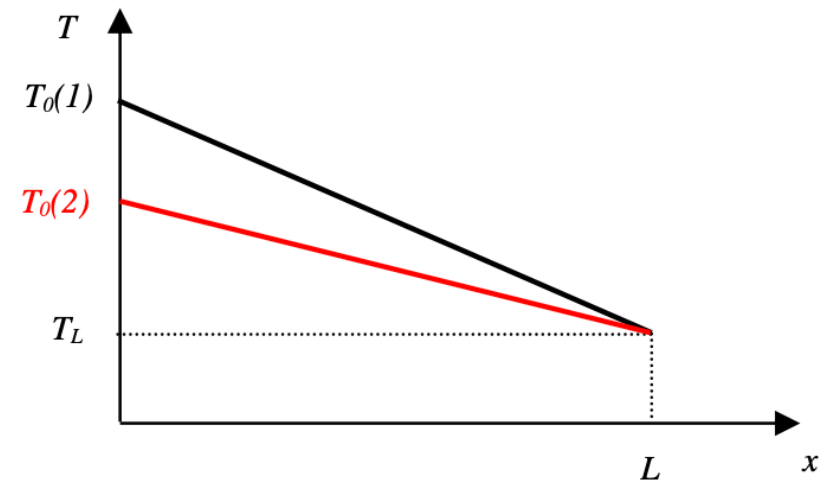
$$\Rightarrow \quad T(x=L) = \frac{-\phi_0}{\lambda S} L + B = T_L \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\phi_0}{\lambda S} L + T_L$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(x) - T_L = \frac{\phi_0}{\lambda S} (L - x)}$$

On peut alors déterminer la température du barreau en $x = 0$: $T_0 - T_L = \frac{\phi_0}{\lambda S} L$.

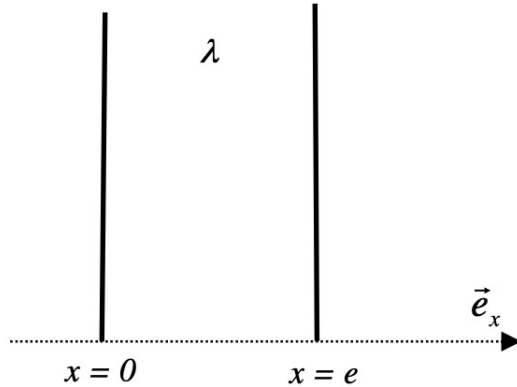
Lorsque T_L est fixée, la température T_0 est d'autant plus élevée que le flux imposé ϕ_0 est important (la pente est plus élevée).

Sur le graphique ci-contre, nous avons tracé 2 profils de température correspondant à 2 flux de chaleur différents : $\phi_0(1) > \phi_0(2)$, T_L étant fixée.



3) Le problème du mur

On considère un mur constitué d'un matériau homogène et indéformable de conductivité thermique constante, d'épaisseur e . On suppose que la hauteur et la profondeur du mur sont très grandes devant son épaisseur de façon à pouvoir faire l'hypothèse du problème unidirectionnel.



Le flux de chaleur se propagera dans une seule direction (suivant x par exemple) et la température à l'intérieur du mur ne dépendra que d'une seule variable d'espace : $T = T(x)$.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 T = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0}$$

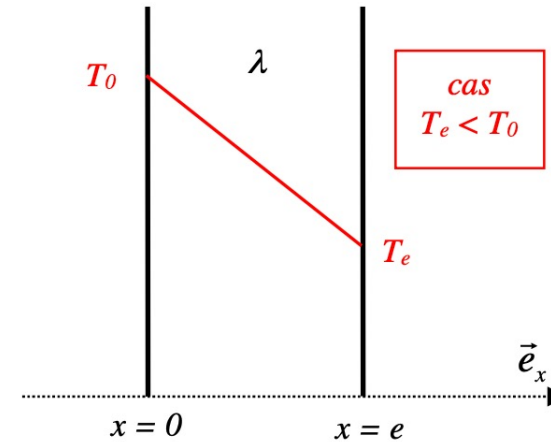
$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dx} = Cste = A \quad \Leftrightarrow T(x) = A x + B$$

La distribution de température à l'intérieur du mur est linéaire. Si on note : $T_0 = T(x=0)$

et $T_e = T(x=e)$

$$\Rightarrow \boxed{T(x) = \frac{T_e - T_0}{e} x + T_0} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\theta(X) = \frac{T(x) - T_0}{T_e - T_0} = X} \quad \text{où } X = \frac{x}{e}$$



Déterminons la densité de flux de chaleur qui traverse le mur en x quelconque en appliquant la loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \vec{\nabla} T = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} \vec{e}_x = \varphi_x \vec{e}_x$$

où on a posé : $\varphi_x = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e}$ (en W/m^2) $\varphi_x > 0$ (si $T_0 > T_e$) ou $\varphi_x < 0$ (si $T_0 < T_e$)

Le flux de chaleur traversant la surface du mur pour un x quelconque s'écrit :

$$\phi_x = \iint_S \varphi_x dS = \lambda S \frac{T_0 - T_e}{e} \quad (\text{en } W) \quad \phi_x > 0 \text{ ou } \phi_x < 0$$

où $S = \text{Hauteur} \times \text{Profondeur du mur} = \text{surface du mur traversée par le flux de chaleur.}$

On constate que le flux de chaleur ne dépend pas de x , ce qui implique notamment que le flux qui traverse la frontière en $x = 0$ sera égal au flux qui traverse la frontière en $x = e$, vérifiant ainsi la conservation du flux dans le cas du régime permanent sans dissipation.

La relation précédente peut encore s'écrire :

$$\phi = \phi_x = \frac{T_0 - T_e}{\frac{e}{\lambda S}} \quad (2) \quad \text{et} \quad T(x) = -\frac{\phi}{\lambda S} x + T_0 \quad (3)$$

a. Si les deux faces du mur sont à température imposée

Alors l'équation (1) détermine complètement la distribution de température. Les flux de chaleur aux frontières sont a priori inconnus mais en régime stationnaire et sans dissipation, le flux de chaleur se conserve et ne dépend donc pas de x : $\vec{\phi}_0 = \vec{\phi}_e = \vec{\phi}$, donné par l'équation (2).

Les flux aux frontières du point de vue du mur :

$$\varphi = -\vec{\phi} \cdot \vec{n} \quad \text{où } \vec{n} \text{ normale extérieure à la frontière considérée}$$

Dans ce problème :
$$\vec{\phi} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{e}_x = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} \vec{e}_x \quad \text{indépendant de } x$$

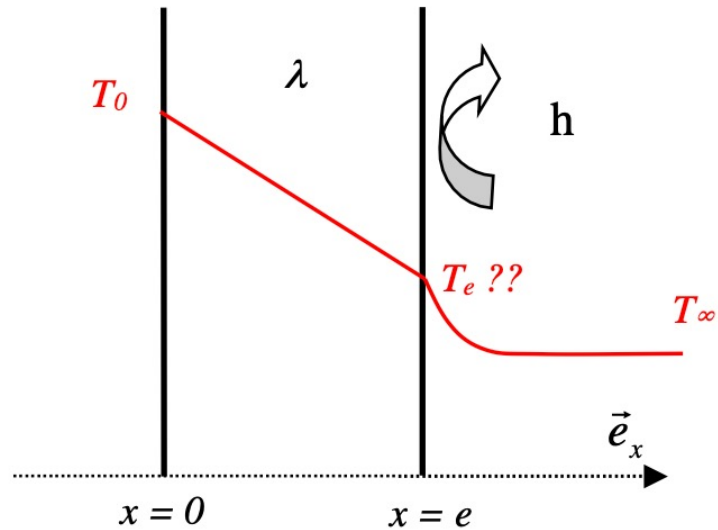
- en $x = 0$: $\vec{n} = -\vec{e}_x \Rightarrow \varphi_0 = \vec{\phi}|_{x=0} \cdot \vec{e}_x = \lambda \frac{T_0 - T_e}{e} \quad \text{en } (W/m^2)$

On vérifie bien que φ_0 est positif (entrant dans le mur) lorsque $T_0 > T_e$ (la chaleur se propage du chaud vers le froid).

- en $x = e$: $\vec{n} = \vec{e}_x \Rightarrow \varphi_e = -\vec{\phi}|_{x=e} \cdot \vec{e}_x = -\lambda \frac{T_0 - T_e}{e} = \lambda \frac{T_e - T_0}{e} \quad \text{en } (W/m^2)$

On vérifie bien que φ_e est négatif (sortant du mur) lorsque $T_0 > T_e$.

b. Si au moins une des faces du mur est au contact avec un fluide en écoulement



On reprend le mur précédent, mais cette fois-ci :

- la frontière en $x = 0$ est maintenue à température constante, T_0 .
- la frontière en $x = e$ est soumise à un flux convectif dû à l'écoulement du fluide, caractérisé par le coefficient d'échange convectif, h . La température du fluide loin du mur est connue, égale à T_∞ .

La distribution de température dans le mur sera toujours donnée par l'équation (1), mais dans ce cas, la température T_e est inconnue car résulte des échanges de chaleur par conduction à l'intérieur du mur et par convection avec le fluide. De même, le flux de chaleur dans le mur est donné par l'équation (2) mais là encore, on doit connaître T_e pour le calculer.

à la frontière $x = e$:

- le flux de chaleur du côté du mur ($x = e^-$) est donné par l'équation (2) (loi de Fourier) :

$$\phi|_{x=e^-} = \lambda S \frac{T_0 - T_e}{e}$$

- le flux de chaleur échangé par convection dans le fluide ($x = e^+$) est donné par la loi de Newton :

$$\phi|_{x=e^+} = hS(T_e - T_\infty)$$

La continuité du flux de chaleur à l'interface solide-fluide (en $x = e$) impose :

$$\phi|_{x=e^-} = \phi|_{x=e^+} = \phi \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda S \frac{T_0 - T_e}{e} = hS(T_e - T_\infty) = \phi}$$

On peut ainsi exprimer T_e en fonction des données du problème :

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\left(h + \frac{\lambda}{e}\right) T_e = \frac{\lambda}{e} T_0 + h T_\infty}$$

❖ Déterminons le flux de chaleur qui traverse le système :

- ✓ une première méthode consiste à remplacer l'expression de T_e dans l'expression de ϕ .
- ✓ une deuxième méthode, beaucoup plus utilisée, permet de s'affranchir du calcul explicite de T_e .

On a vu que : $\lambda S \frac{T_0 - T_e}{e} = hS(T_e - T_\infty) = \phi$ soit :

$$\begin{cases} T_0 - T_e = \frac{e}{\lambda S} \phi \\ T_e - T_\infty = \frac{1}{h S} \phi \end{cases}$$

En additionnant ces deux relations : $T_0 - T_\infty = \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h} \right) \phi = \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h} \right) \frac{\phi}{S}$

Le flux de chaleur qui traverse le mur est : $\phi = \frac{T_0 - T_\infty}{\left(\frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h S} \right)}$ (en W)

On obtient ainsi une expression du flux à partir des données du problème, sans avoir à calculer la température T_e a priori inconnue. On pourra alors déterminer complètement la distribution de température dans le mur par l'équation (3) :

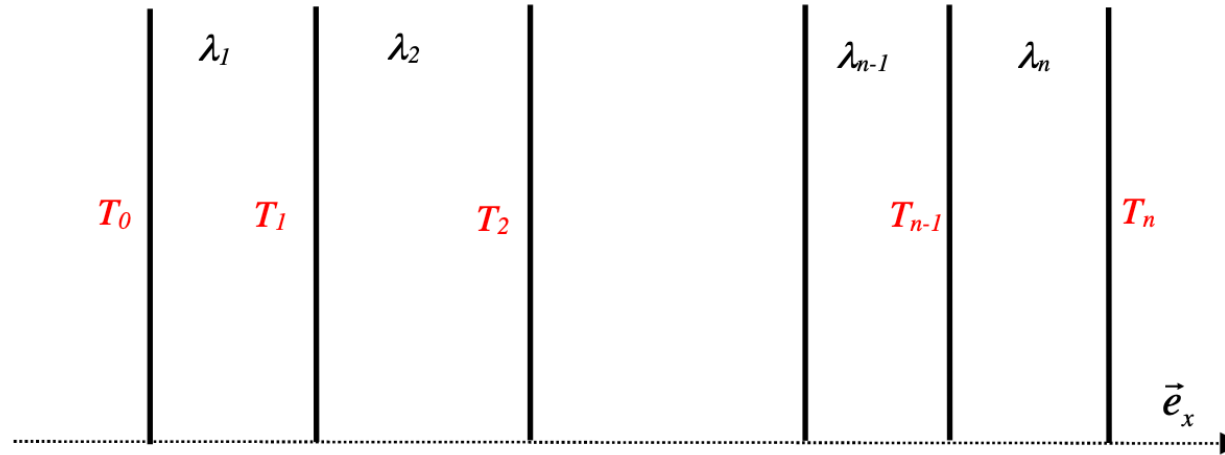
$$T(x) - T_0 = -\frac{\phi}{\lambda S} x$$

Si besoin, on aura alors facilement accès à la température en $x = e$: $T_e - T_0 = -\frac{\phi}{\lambda S} e$

c. Succession de murs

Considérons une succession de n murs de matériaux différents, de conductivité λ_i et d'épaisseur e_i ($i = 1$ à n). On se place dans le cas où tous les murs ont la même hauteur et la même profondeur (même surface S traversée par le flux de chaleur).

On note, T_0 et T_n , les températures qui règnent à chaque extrémité du système.



Flux de chaleur qui traverse le système : $\phi = \phi_1 = \dots = \phi_i = \dots = \phi_n$ (conservation du flux)

Exprimons le flux de chaleur qui traverse le mur i :

$$\vec{\phi}_i = -\lambda_i S \frac{dT}{dx} \Big|_i \vec{e}_x = -\lambda_i S \frac{T_i - T_{i-1}}{e_i} \vec{e}_x = \frac{\lambda_i S}{e_i} (T_{i-1} - T_i) \vec{e}_x = \phi_i \vec{e}_x = \phi \vec{e}_x$$

$$\Leftrightarrow T_{i-1} - T_i = \phi_i \frac{e_i}{\lambda_i S}$$

$$\Rightarrow T_0 - T_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S} \phi ; T_1 - T_2 = \frac{e_2}{\lambda_2 S} \phi ; \dots ; T_{n-1} - T_n = \frac{e_n}{\lambda_n S} \phi$$

$$\Rightarrow T_0 - T_n = \phi \left(\frac{e_1}{\lambda_1 S} + \frac{e_2}{\lambda_2 S} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n S} \right) = \phi \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{T_0 - T_n}{\sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S_i}}} \text{ (en W)}$$

➤ Distribution de température dans le système

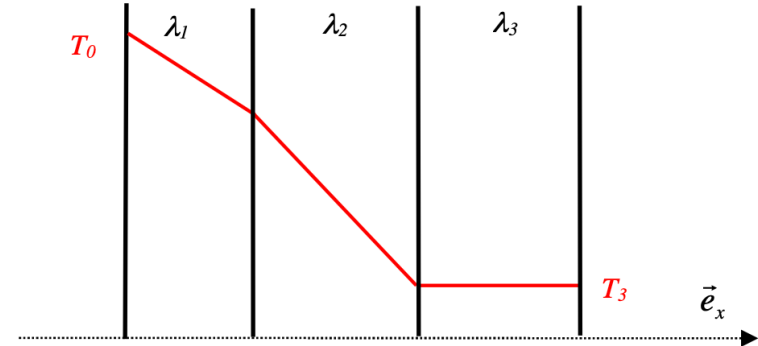
La distribution de température $T(x)$ est linéaire dans chaque tronçon de mur.

Pour le mur i :

$$\boxed{T^{(i)}(x) - T_{i-1} = -\frac{\phi}{\lambda_i S} x} \text{ (voir équation (3))}$$

Le profil de température est linéaire, avec, pour un flux de chaleur fixé, une pente d'autant plus petite que λ_i est grand (les bons conducteurs uniformisent la température).

Dans l'exemple représenté ci-dessous : $\lambda_1 > \lambda_2$ et $\lambda_3 \rightarrow \infty$.



5) Résistance thermique – Analogie électrique

D'après les résultats établis au paragraphe précédent, on constate que les expressions des flux de chaleur qui traversent un milieu par conduction ou qui sont échangés par convection peuvent se mettre sous la forme :

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{thermique}}$$

- **pour le mur plan :**

$$\phi = \frac{T_0 - T_e}{\frac{e}{\lambda S}}$$

\Rightarrow

$$R_{thermique} = \frac{e}{\lambda S}$$

- **pour le cylindre creux :**

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) / (2 \pi \lambda H)}$$

\Rightarrow

$$R_{thermique} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2 \pi \lambda H}$$

- **pour le flux convectif :**

$$\phi = h S (T_p - T_\infty)$$

\Rightarrow

$$R_{thermique} = \frac{1}{h S}$$

La résistance thermique représente ainsi la résistance du milieu soumis à un écart de température donné, à laisser se propager un flux de chaleur. Pour un ΔT donné, le flux de chaleur qui traverse le milieu sera d'autant plus petit que la résistance est grande. Ainsi par exemple pour le cas du mur, on voit que plus le milieu est isolant (λ faible), plus la résistance est grande et donc plus le flux est petit. Lorsque l'on traitera d'un problème *d'isolation thermique*, on cherchera donc à augmenter la résistance du système. En revanche, lorsque l'on cherchera à *améliorer les transferts* de chaleur (refroidissement de systèmes, échangeurs...) on cherchera à diminuer la résistance du système (en augmentant h par exemple).

